COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

EXERCICE I

Dans un plan P, on se donne un triangle ABC. À toute droite D, non parallèle à l'un de ses côtés, on associe le point G_D, isobarycentre des trois points communs à D et aux droites (AB), (BC) et (CA).

L'objet de l'exercice est de déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points G_D lorsque D varie.

1. Démontrer que, lorsque D se déplace en restant parallèle à une droite δ, le point G_D décrit une droite Δ_δ.
2. On suppose, dans cette question seulement, ABC équilatéral. Montrer que, lorsque δ varie, les droites Δ_δ sont toutes tangentes à un même cercle et déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ dans ce cas.
3. On revient au cas général. Montrer que l'on peut trouver un triangle équilatéral A'B'C' de l'espace dont le projeté orthogonal sur le plan P est le triangle ABC et en déduire l'ensemble $\mathscr{F}$.

EXERCICE II

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \geqslant 0 \text{ et, pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}.$$

EXERCICE III

Dans le plan, on considère Γ_1, Γ_2 et Γ_3, trois cercles de rayon R passant par le point O, et on note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points du plan intérieurs à au moins deux de ces cercles.

Comment doit-on placer Γ_1, Γ_2 et Γ_3 pour que l'aire de $\mathscr{D}$ soit minimale ? Justifier votre réponse.

EXERCICE IV

Soient A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 six points du plan tels que l'on ait :

pour tous les entiers i et j de $\{1, 2, 3\}$ $A_iB_j = i + j$.

Que peut-on dire des six points ?

EXERCICE V

Soit f une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

Démontrer que l'on peut trouver trois entiers naturels a, b, c vérifiant :

$$a < b < c \quad \text{et} \quad f(a) + f(c) = 2f(b).$$